Version 02.02.2008 Dezember 2007

MIII – Analysis in mehreren Veränderlichen – WiSe 2007/08

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\,\infty\,\infty$

Kapitel XIII. Integrationstheorie

Das Integral $\int f\,d\mu$ für Abbildungen $f : X \to E$ mit Werten in einem Banachraum E, insbesondere also für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen, wird zunächst im Falle eines allgemeinen Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eingeführt und untersucht. Die wesentlichen Konvergenzsätze der Integrationstheorie und Folgerungen für Parameterintegrale werden bewiesen. Danach werden die Eigenschaften des Integrals zum Lebesguemaß auf dem $\mathbb{R}^n$, also für den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ bzw. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$, eingehender studiert. Insbesondere wird genauer auf die Produktstruktur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$, $n = k + m$, mit den Konsequenzen für die Integration und auf die Transformationsformel für das Lebesgueintegral auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eingegangen.

§46 Integration

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ stets ein Maßraum und E ein Banachraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. In Bezug auf die Borelalgebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ ist $(E, \mathcal{B})$ ein Messraum.

Unter einer Stufenfunktion verstehen wir wie zuvor eine messbare Abbildung $\varphi : X \to E$, die nur endlich viele Bildpunkte $\varphi(X) = \{v_0, \ldots, v_m\}$ hat (Funktionen mit nur endlich vielen Bildpunkten werden oft auch *einfache Funktionen* genannt). Die Messbarkeit bedeutet dann, dass die Mengen $\varphi^{-1}(v_j) = A_j$ messbar sind. Es gilt

$$\varphi = \sum_{j=0}^{m} \chi_{A_j} v_j \,,$$

wenn die v_j paarweise verschieden sind, wobei $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion einer Teilmenge $A \subset X$ ist: $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\chi_A(x) = 0$ für $x \in X \setminus A$.

Eine Stufenfunktion wird auch durch eine endliche, disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$, $B_k \in \mathcal{A}$, und beliebige $w_k \in E$ gegeben, indem $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \chi_{B_k} w_k$ gesetzt wird. In dieser Darstellung kann $w_k = w_j$ für $k \neq j$ vorkommen. Im Falle $w_j \neq w_k$ für alle $j \neq k$ spricht man von der *Normalform* der Darstellung von φ, das ist wieder die oben eingeführte Darstellung mit $\varphi = \sum_{j=0}^{m} \chi_{A_j} v_j$, $A_j = \varphi^{-1}(v_j)$, $v_j \neq v_k$, $j \neq k$.

Die Skalarmultiplikation auf E wird ergänzt durch die folgende Festlegung für den Nullvektor $0 \in E$ (auch im Falle $E = \mathbb{R}$):

$$\infty\, 0 := 0\,, \;\; -\infty\, 0 := 0\,.$$

(46.1) Definition: (Integration von Treppenfunktion) Eine Stufenfunktion $\varphi = \sum_{j=0}^{m} \chi_{A_j} v_j$ (mit paarweise verschiedenen A_j, aber nicht notwendigerweise auch paarweise verschiedener v_j) ist *integrierbar* (genauer: μ-*integrierbar*) und heißt dann eine *Treppenfunktion*, wenn

$$\sum_{j=0}^{m} \|v_j\| \, \mu(A_j) < \infty$$

gilt. In diesem Falle wird das *Integral von* φ *(bezüglich* μ) durch

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{j=0}^{m} \mu(A_j) v_j \in E$$

definiert.

Man schreibt auch $\int \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu$, $\int \varphi \, d\mu = \int \varphi$ oder $\int \varphi \, d\mu = \int \varphi(x) \, d\mu(x)$ und Ähnliches.

Die Menge der Treppenfunktionen auf X mit Werten in E wird mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mu) = \mathcal{T}(X, E)$ oder $\mathcal{T}_\mu(X, E)$ bezeichnet.

(46.2) Bemerkung: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $v_0 = 0$ und $v_j \neq 0$ für $j > 0$ in einer Darstellung einer Stufenfunktion $\varphi = \sum_{j=0}^{m} \chi_{A_j} v_j$ von φ mit paarweise disjunkten Teilmengen $A_j \subset X$ von X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1° φ ist Treppenfunktion.

2° $\mu(A_j) < \infty$ für alle $j > 0$.

3° $\mu(\varphi^{-1}(E \setminus \{0\})) < \infty$.

(46.3) Lemma:

1° *Das Integral* $\int \varphi \, d\mu$ *für eine Treppenfunktion* φ *ist unabhängig von der speziellen Darstellung* $\varphi = \sum_{j=0}^{m} \chi_{A_j} v_j$, *und damit ist das Integral nach Definition 46.1 überhaupt erst wohldefiniert.*

2° *Die Treppenfunktionen* $\mathcal{T}$ *bilden einen Vektorraum, im Falle* $E = \mathbb{R}$ *sogar eine Algebra bezüglich der punktweisen Addition und Multiplikation.*

3° *Die Abbildung* $\int : \mathcal{T} \to E \,,\ \varphi \mapsto \int \varphi \, d\mu \,,$ *ist linear.*

4° *Im Falle* $E = \mathbb{R}$ *ist das Integral positiv in folgendem Sinne: Aus* $\varphi \geq 0$, *also* $v_j \geq 0$ *für alle* $j = 0, \ldots, m$, *folgt* $\int \varphi \, d\mu \geq 0$. *Äquivalent dazu:*

$$\varphi \leq \psi \implies \int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$$

für eine weitere Treppenfunktion $\psi \in \mathcal{T}$.

5° *Eine Stufenfunktion* $\varphi : X \to E$ *ist genau dann integrierbar, wenn das für* $\|\varphi\| : X \to \mathbb{R} \,,\ x \mapsto \|\varphi(x)\|$, *gilt und es ist*

$$\left\| \int \varphi \, d\mu \right\| \leq \int \|\varphi\| \, d\mu < \infty \,.$$

(46.4) Beispiele:

1° Mit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und $\mu = \zeta$ (das Zählmaß) erhält man für Treppenfunktionen $\varphi : X \to E$:

$$\int \varphi \, d\zeta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(n) \,.$$

2° Für das Dirac-Maß $\delta_p : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ auf einer Menge X ist jede Abbildung $\varphi : X \to E$ mit endlichem Bild eine Treppenfunktion und es gilt für $\varphi = \sum \chi_{A_j} v_j$:

$$\int \varphi \, d\zeta = \sum \chi_{A_j}(p) v_j = v_k \,,$$

wenn $p \in A_k$. (Zur Treppenfunktion gehört die Zerlegung von X in paarweise disjunkte Teilmengen A_j, und $p \in X$ liegt in genau einem A_k.) 11.12.2007

3° Die Treppenfunktionen aus Kapitel IX.A auf einem kompakten Intervall $J = [a, b] = X$ mit Werten in $\mathbb{R}$ (vgl. 27.2) sind auch Treppenfunktionen im Sinne der neuen Definition 46.1 für das Lebesguemaß. Die Definiton 46.1 liefert eine Ausdehnung des in 27.2 getroffenen Begriffs: Eine Treppenfunktionen g nach 27.2 hat als Urbilder $g^{-1}(v)\,,\ v \in \mathbb{R}$, stets endliche Vereinigungen von (evtl. ausgearteten) Intervallen in J, während eine $\mathbb{R}$-wertige Treppenfunktion φ nach 46.1 für $X = J$ mit dem Lebesguemaß als Urbilder $\varphi^{-1}(v)\,,\ v \in \mathbb{R}\,,$ beliebige lebesguemessbare Teilmengen aus J haben kann. Das kann man so verstehen, das in Paragraf 27 die Treppenfunktion zum Prämaß „Intervalllänge“ definiert werden, während die Definiton jetzt auf Treppenfunktionen zum Lebesguemaß ausgedehnt wird.

4° Die Definition des Integrals in 27.2 für die eingeschränkte Klasse von Treppenfunktionen (vgl. 3°) liefert denselben Integralwert wie 46.1.

Das folgende Resultat ermöglicht die Ausdehnung des Integrals auf eine größere Klasse von Abbildungen. Diese Art der sukzessiven Einführung des Integrals ist uns aus dem Kapitel IX.B bekannt. Es handelt sich hier wie dort um die lineare und stetige Fortsetzung auf einen wesentlich größeren Raum von Funktionen, und zwar jetzt bezüglich der Seminorm, die im folgenden Satz beschrieben wird.

(46.5) Satz: *Das Integral* $\|\varphi\|_1 := \int \|\varphi\| \, d\mu$ *definiert eine* Seminorm *auf dem Raum* $\mathcal{T}(\mu)$ *der Treppenfunktionen zu einem Maßraum. Das heißt, für alle* $\varphi, \psi \in \mathcal{T}$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\in \mathbb{C}$*) gelten die folgenden Eigenschaften*

1° $\|\varphi\|_1 \geq 0$.

2° $\|\lambda\varphi\|_1 = |\lambda| \, \|\varphi\|_1$.

3° $\|\varphi + \psi\|_1 \leq \|\varphi\|_1 + \|\psi\|_1$.

Zu einer Norm fehlt die Eigenschaft $\|\varphi\|_1 = 0 \implies \varphi = 0$. Diese Eigenschaft ist z.B. im Falle des Lebesguemaßes verletzt, denn für eine Nullmenge $N \neq \emptyset$ ist die charakteristische Funktion $\varphi = \chi_N$ eine Treppenfunktion mit $\varphi \neq 0$ und $\|\varphi\|_1 = 0$.

Die Seminorm $\| \ \|_1$ ist genau dann auch eine Norm, wenn $\emptyset$ die einzige Nullmenge ist, z.B. im Falle des Zählmaßes.

Aufgrund von Satz 46.5 ist die Menge $\mathcal{N}(\mu) := \{\varphi \in \mathcal{T} : \|\varphi\|_1 = 0\}$ ein Untervektorraum des Raumes $\mathcal{T}(\mu)$ der Treppenfunktionen. Auf dem Quotientenraum[1] $\mathcal{T}(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ induziert dann die Seminorm $\| \ \|_1$ eine richtige Norm. Im Falle des Zählmaßes verändert sich nichts, im Falle des Dirac-Maßes allerdings ist der Quotient erheblich kleiner als $\mathcal{T}(\mu)$. Der für uns interessanten Fall des Lebesguemaßes liegt dazwischen.

Man weiß, was in dem normierten Raum $\mathcal{T}(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ die Cauchyfolgen sind. Wir wollen aber in $\mathcal{T}(\mu)$ bleiben und übertragen den Begriff in nahe liegender und natürlicher Weise:

Definition: Eine Folge (φ_j) von Treppenfunktionen, $\varphi_j \in \mathcal{T}(\mu)$, heiße $\mathcal{L}_1$-*Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j, k \geq N$ stets $\|\varphi_j - \varphi_k\|_1 < 0$ gilt.

Konvergenz in Bezug auf die Seminorm $\| \ \|_1$ ist dann nicht wohldefiniert in dem Sinne, wie wir das bisher kennen gelernt haben.

Um das genau zu beschreiben, führen wir das folgende grundlegende Konzept ein, das in der Maß- und Integrationstheorie wie auch in der Wahrscheinlichkeitstheorie ständig Verwendung findet:

(46.6) Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Eigenschaft von Punkten $x \in X$ gilt *fast überall* (oder für *fast alle* x bzw. *fast jedes* x, genauer μ-*fast überall*), wenn sie außerhalb einer Nullmenge gilt. Das bedeutet, dass die Teilmenge in X, für die sie nicht gilt, in einer Nullmenge enthalten ist.

Abkürzung dazu: „f.ü.“ oder „μ-f.ü“.

In Formeln: Ist $\mathcal{E}(x)$ die angesprochene Eigenschaft, so gilt $\mathcal{E}(x)$ f.ü., wenn die Teilmenge $\{x \in X : \mathcal{E}(x) \text{ gilt nicht}\}$ von X in einer geeigneten Nullmenge enthalten ist.

Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig, so vereinfacht sich die Bedingung, indem es genügt, dass die Ausnahmemenge $\{x \in X : \mathcal{E}(x) \text{ gilt nicht}\}$ selbst eine Nullmenge zu sein hat.

Beispiele: Zwei Funktionen $f, g : X \to E$ sind f.ü. gleich, wenn $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ in einer geeigneten Nullmenge enthalten ist. Und eine Folge $f_j : X \to E$ konvergiert punktweise f.ü. gegen $f : X \to E$, wenn es eine Nullmenge $Z \subset X$ gibt, so dass für alle $x \in X \setminus Z$ die Konvergenzbedingung $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ gilt.

Testen wir diesen Begriff, indem wir **die zentrale technische Aussage der Integrationstheorie** im folgenden Satz formulieren und ausführlich beweisen.

(46.7) Satz: *Eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge (φ_j) von Treppenfunktionen hat stets eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \to E$ konvergiert. Es gilt sogar: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine messbare Teilmenge $Z \subset X$ mit $\mu(Z) < \varepsilon$, so dass die Teilfolge auf $X \setminus Z$ gleich-*

[1] Hier wird der Begriff des Quotientenvektorraumes V/U zu einem Untervektorraum U eines Vektorraumes V vorausgesetzt.

mäßig gegen f konvergiert.

Beweis: Weil (φ_j) nach Voraussetzung eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall\, m, n \geq j_k : \|\varphi_m - \varphi_n\|_1 < 2^{-2k}\,.$$

Rekursiv kann $j_{k+1} > j_k$ gewählt werden, so dass auch

$$\forall\, m \geq j_k : \|\varphi_m - \varphi_{j_k}\|_1 < 2^{-2k}$$

gilt. Für die Teilfolge (φ_{j_k}) wird im Folgenden die Behauptung des Satzes bewiesen.

Setze $Y_k := \{x \in X : \left\|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\right\| \geq 2^{-k}\}$. Dann ist Y_k messbar, weil φ_{j_k} eine messbare Funktion ist, also auch die Funktion

$$x \mapsto \left\|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\right\|$$

als Komposition von $\varphi_{j_{k+1}} - \varphi_{j_k}$ und der stetigen Abbildung $\|\ \ \|$ messbar ist. Es gilt für beliebige $x \in X$:

$$2^{-k}\chi_{Y_k}(x) \leq \left\|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\right\|\,.$$

Denn für $x \notin Y_k$ ist die linke Seite 0, und für $x \in Y_k$ gilt $2^{-k} \leq \left\|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\right\|$ nach Definition der Menge Y_k. Es folgt (nach 46.3.4°)

$$2^{-k}\mu(Y_k) = \int 2^{-k}\chi_{Y_k}(x)\, d\mu(x) \leq \int \left\|\varphi_{j_{k+1}}(x) - \varphi_{j_k}(x)\right\|\, d\mu(x) = \left\|\varphi_{j_{k+1}} - \varphi_{j_k}\right\|_1$$

und damit $\mu(Y_k) < 2^{-k}$ nach Wahl der Teilfolge (φ_{j_k}). Die Teilmenge $Z_k := \bigcup_{m=k}^{\infty} Y_m$ ist messbar mit $\mu(Z_k) \leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} = 2 \cdot 2^{-k}$, weil μ σ-additiv ist.

Jetzt gilt für $x \notin Z_k$: Für alle $m \geq k$ ist $x \notin Y_m$, also gilt $\left\|\varphi_{j_{m+1}}(x) - \varphi_{j_m}(x)\right\| < 2^{-m}$ mit der Konsequenz, dass die oben ausgewählte Teilfolge die Cauchybedingung erfüllt: Für $n \geq m$ ist

$$\|\varphi_{j_m}(x) - \varphi_{j_n}(x)\| \leq \sum_{l=m}^{n-1} \left\|\varphi_{j_{l+1}}(x) - \varphi_{j_l}(x)\right\| < 2 \cdot 2^{-m}\,.$$

Daher konvergiert $(\varphi_{j_m}(x))$ wegen der Vollständigkeit des Banachraumes E gegen einen Vektor $f(x) \in E$, die Teilfolge (φ_{j_m}) konvergiert also punktweise gegen f auf $X \setminus Z_k$. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf $X \setminus Z_k$, weil die letzten Ungleichungen gleichmäßig für alle $x \in X \setminus Z_k$ gelten.

Schließlich konvergiert (φ_{j_m}) punktweise außerhalb der messbaren Menge $N := \bigcap Z_k$. Diese Menge hat das Maß $\mu(N) = 0$ wegen $\mu(N) \leq \mu(Z_k) < 2 \cdot 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. N ist also Nullmenge. Damit ist der Satz bewiesen. □

Für eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge (φ_j) von Treppenfunktionen $\varphi_j \in \mathcal{T}(\mu, E)$ ist auch $(\int \varphi_j\, d\mu)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in E, denn nach 46.3.3° und 46.3.5° ist

$$\left\|\int \varphi_j\, d\mu - \int \varphi_k\, d\mu\right\| \leq \int \|\varphi_j - \varphi_k\|\, d\mu = \|\varphi_j - \varphi_k\|_1\ ,$$

und das bedeutet, dass $(\int \varphi_j\, d\mu)$ in E konvergiert (E ist als Banachraum vollständig). Diese Beobachtung führt zu folgendem Ansatz für den Begriff des Integrals.

(46.8) Definition: Eine Funktion $f : X \to E$ heißt *integrierbar* (genauer: μ*-integrierbar*), wenn es eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge (φ_j) von Treppenfunktionen gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Das *Integral (von f über X in Bezug auf μ)* ist

$$\int f \, d\mu := \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j \, d\mu \, .$$

Außerdem wird für messbare Teilmengen $Y \subset X$ das *Integral von f über Y* durch

$$\int_Y f \, d\mu = \int \chi_Y f \, d\mu$$

festgelegt.

Dabei steht die Notation $\chi_Y \, f$ nicht nur für Funktionen f, die auf ganz X vorgegeben sind, sondern auch für Funktionen $f : Z \to E$ auf Teilmengen $Z \subset X$ mit $Y \subset Z$: $\chi_Y \, f$ ist insofern zu verstehen als die Funktion, die in Y die Werte einer vorgegebenen Funktion f annimmt und die in $X \setminus Y$ konstant gleich 0 ist.

Insbesondere erhalten wir für den Spezialfall $f = 1$ für messbare Teilmengen $Y \subset X$ endlichen Maßes $\mu(Y) < \infty$ die Identität

$$\int_Y 1 \, d\mu = \int \chi_Y \, d\mu = \mu(Y) \, .$$

Um aber einzusehen, dass dieser Ansatz (Definition 46.8) überhaupt wohldefiniert ist, gilt es, das folgenden Lemma zu beweisen.

(46.9) Lemma: *Es seien (φ_j) und (ψ_j) zwei $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolgen aus $\mathcal{T}(\mu, E)$, die beide fast überall gegen dieselbe Funktion $f : X \to E$ konvergieren. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - \psi_j\|_1 = 0 \, ,$$

also auch

$$\lim_{j\to\infty} \int \varphi_j \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int \psi_j \, d\mu \in E \, .$$

Beweis:[2] Für die Folge (τ_j) der Differenzen $\tau_j := \varphi_j - \psi_j \, , \; j \in \mathbb{N}$, die fast überall gegen 0 konvergiert, muss nur $\lim \|\tau_j\|_1 = 0$ gezeigt werden, und dafür genügt es, weil (τ_j) eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge ist, die Bedingung $\lim \|\tau_{j_k}\|_1 = 0$ für eine geeignete Teilfolge nachzuweisen. Wir wählen eine Teilfolge (τ_{j_k}) mit den Eigenschaften von Satz 46.7. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$ groß genug, so dass für alle $m \geq k$ stets

$$\|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\|_1 < \varepsilon \, .$$

Und es sei $Z \subset X$ eine messbare Teilmenge, so dass (τ_{j_k}) auf $X \setminus Z$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert mit $\mu(Z) < \frac{\varepsilon}{C}$, wobei

$$C := \sup\{\|\tau_{j_k}(x)\| : x \in X\}$$

[2]nicht vorgetragen

($C < \infty$, weil τ_{j_k} nur endlich viele Werte annimmt). Da τ_{j_k} eine integrierbare Stufenfunktion ist, gilt außerdem $\mu(A) < \infty$ für $A := \{x \in X : \tau_{j_k}(x) \neq 0\}$. Es gilt schließlich

$$\|\tau_{j_m}\|_1 = \int_X \|\tau_{j_m}\| \, d\mu \leq \int_Z \|\tau_{j_m}\| \, d\mu + \int_{A\setminus Z} \|\tau_{j_m}\| \, d\mu + \int_{X\setminus A} \|\tau_{j_m}\| \, d\mu \, .$$

Die drei Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung haben der Reihe nach die folgenden Abschätzungen:

1. $\displaystyle\int_Z \|\tau_{j_m}\| \, d\mu \leq \int_Z \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\| \, d\mu + \int_Z \|\tau_{j_k}\| \, d\mu \leq \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\|_1 + \mu(Z)C < 2\varepsilon \, .$

2. $\displaystyle\int_{A\setminus Z} \|\tau_{j_m}\| \, d\mu \leq \sup\{\|\tau_{j_m}(x)\| : x \in X \setminus Z\} \cdot \mu(A) < \varepsilon \, ,$

wenn m groß genug ist, weil (τ_{j_m}) gleichmäßig gegen 0 auf $X \setminus Z$ gegen 0 konvergiert.

3. $\displaystyle\int_{X\setminus A} \|\tau_{j_m}\| \, d\mu \leq \int_{X\setminus A} \|\tau_{j_m} - \tau_{j_k}\| \, d\mu + \int_{X\setminus A} \|\tau_{j_k}\| \, d\mu \leq \|\tau_{j_m} - \tau_{jk}\|_1 < \varepsilon \, .$

Insgesamt ergibt sich $\|\tau_{j_m}\|_1 < 4\varepsilon$ für genügend große $m \in \mathbb{N}$, also $\|\tau_{j_m}\|_1 \longrightarrow 0$, und das war zu zeigen. $\square$

(46.10) Regeln:

1° Die integrierbaren Funktionen $f : X \to E$ bilden einen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{L}_1(\mu)$ oder $\mathcal{L}_1(\mu, E)$ bezeichnen.

2° Das Integral als Abbildung

$$\int : \mathcal{L}_1(\mu, E) \to E \, , \; f \mapsto \int f \, d\mu \, ,$$

ist eine lineare Abbildung.

3° Das Integral ist monoton: Im Falle $E = \mathbb{R}$ gilt für $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$:

$$f \leq g \implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu \, .$$

4° Für disjunkte messbare Teilmengen $Y, Z \subset X$ und integrierbare $f : Y \cup Z \to E$ (das heißt, die Fortsetzung $\chi_{Y\cup Z} f$ auf X, die außerhalb von $Y \cup Z$ Null gesetzt wird, ist integrierbar im Sinne der Definition 46.8) gilt

$$\int_{Y\cup Z} f \, d\mu = \int_Y f \, d\mu + \int_Z f \, d\mu \, .$$

5° Wenn f integrierbar ist, so gilt das auch für $\|f\|$, also für die $\mathbb{R}$-wertige Funktion $x \mapsto \|f(x)\|$, und es ist

$$\left\| \int f \, d\mu \right\| \leq \int \|f\| \, d\mu =: \|f\|_1 \, .$$

6° Die in 5° definierte Funktion $\| \;\; \|_1 : \mathcal{L}_1(\mu, E) \to \mathbb{R}$ ist eine Seminorm und das Integral $\int : \mathcal{L}_1(\mu, E) \to E$ ist nach 5° stetig in Bezug auf diese Seminorm: $\left\|\int f \, d\mu\right\| \leq \|f\|_1$.

Insofern ist das Integral in der Definition 46.8 eine stetige und lineare Fortsetzung auf einen größeren Raum von Funktionen als dem Raum der Treppenfunktionen analog zu den Erörterungen in Paragraf 27. Nach Definition von $\mathcal{L}_1(\mu, E)$ ist $\mathcal{T}(\mu, E)$ dicht in $\mathcal{L}_1(\mu, E)$.

7° Für $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ gilt: $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$ fast überall.
(Die Umkehrung „$f = 0$ fast überall $\implies \|f\|_1 = 0$“ gilt direkt nach Definition.)

8° Eine Abänderung von f auf einer Nullmenge $N \subset X$ ändert weder die Integrierbarkeit von f noch den Wert des Integrals $\int f\,d\mu$.

9° Im Falle $E = \mathbb{R}$ sind für $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ das Maximum $\max\{f, g\}$ und das Minumum $\min\{f, g\}$ integrierbar.

10° Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$, $f = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$, ist genau dann integrierbar, wenn das für die Komponenten f^j richtig ist, und es gilt

$$\int f\,d\mu = \left(\int f^1\,d\mu, \ldots, \int f^n\,d\mu \right) .$$

Beweisskizzen:[3]
1° & 2°. Wenn $f, g \in \mathcal{L}_1(\mu, E)$ integrierbar sind mit $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolgen $(\varphi_j), (\psi_j)$ von Treppenfunktionen $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{T}(\mu, E)$, die $\varphi_j \to f$ und $\psi_j \to g$ fast überall erfüllen, so ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ die Folge $(\varphi_j + \lambda\psi_j)$ ebenfalls eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge (weil $\|\ \|_1$ Seminorm ist), die fast überall punktweise gegen $f + \lambda g$ konvergiert. Also ist $f + \lambda g$ integrierbar und es ist

$$\int (f + \lambda g)\,d\mu = \lim_{j\to\infty} \int (\varphi_j + \lambda\psi_j)\,d\mu = \lim_{j\to\infty} \int \varphi_j\,d\mu + \lambda \lim_{j\to\infty} \int \psi_j\,d\mu = \int f\,d\mu + \lambda \int g\,d\mu$$

wegen der Linearität von $\int$ auf den Treppenfunktionen nach 46.3.3°.

3° folgt ebenso direkt aus der Monotonie des Integrals auf den Treppenfunktionen (46.3.4°).

4°. Auch diese Eigenschaft folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft auf dem Niveau der Treppenfunktionen, die wir allerdings noch nicht festgestellt haben. Für eine Treppenfunktion φ ist $\chi_{Y\cup Z}\varphi$ ebenso eine Treppenfunktion und es ist $\chi_{Y\cup Z}\varphi = \chi_Y\varphi + \chi_Z\varphi$. Daher

$$\int_{Y\cup Z} \varphi\,d\mu = \int \chi_{Y\cup Z}\varphi\,d\mu = \int \chi_Y\varphi\,d\mu + \int \chi_z\varphi\,d\mu = \int_Y \varphi\,d\mu + \int_Z \varphi\,d\mu\,.$$

5°. Sei (φ_j) eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge von Treppenfunktionen, die gegen f punktweise f.ü. konvergiert. Dann konvergiert die skalare $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge von Treppenfunktionen $(\|\varphi_j\|)$ f.ü. gegen $\|f\|$. Also ist $\|f\|$ integrierbar mit $\int \|f\|\ d\mu = \lim \int \|\varphi_j\|\ d\mu$. Aus 46.3.5° folgt die Behauptung 5°

$$\left\| \int f\,d\mu \right\| = \left\| \lim \int \varphi_j\,d\mu \right\| = \lim \left(\left\| \int \varphi_j\,d\mu \right\| \right) \le \lim \left(\int \|\varphi_j\|\ d\mu \right) = \int \|f\|\ d\mu\,.$$

6°. Es übertragen sich die entsprechenden Seminorm-Eigenschaften von $\|\ \|_1$ für Treppenfunktionen (vgl. Satz 46.5) direkt unter Verwendung der Definition des Integrals für allgemeine integrierbare Funktionen.

7°. Nach 5° ist $\|f\|$ integrierbar und f.ü. punktweiser Limes von Treppenfunktionen. Also gibt es eine Folge (φ_j) von Treppenfunktionen und eine Nullmenge Z, so dass $\lim_j \varphi_j(x) = \|f(x)\|$ für alle $x \in X \setminus Z$. Nach Änderung auf der Nullmenge Z, wo $\|f\|$ und alle φ_j Null gesetzt werden, haben wir die folgende Situation: Alle $\psi_j := \chi_{X\setminus Z}\varphi_j$, $j \in \mathbb{N}$, sind wieder Treppenfunktionen und die Folge (ψ_j) konvergiert überall punktweise gegen $h := \chi_{X\setminus Z}\|f\|$. h ist daher nach Satz 42.9.2° messbar als punktweiser Limes von Treppenfunktionen. Die Folge (φ_j) kann im übrigen

[3] nur zum Teil vorgetragen

(nach 46.7) so gewählt werden, dass sie außerhalb einer Menge $W \subset X$ vom Maß $\mu(W) < 1$ gleichmäßig konvergiert.

Als messbare Funktion mit Werten in $[0, \infty]$ ist h nach Satz 42.9.3° punktweiser Limes einer aufsteigenden Folge γ_j von Stufenfunktionen. Diese sind auch Treppenfunktionen. Ansonsten wäre $\gamma_j = c > 0$ auf einer Menge $A \subset X$ vom Maß $\mu(A) = \infty$. Und dann wäre eine der Treppenfunktionen ψ_k wegen der gleichmäßigen Konvergenz außerhalb W größer als $\frac{1}{2}c$ auf $A \setminus W$ mit $\mu(A \setminus W) = \infty$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass die Stufenfunktion ψ_k integrierbar ist.

Es ist $\gamma_j \leq h$, also $\gamma_j \leq \|f\|$ f.ü. (nämlich außerhalb von Z). Ist nun $\|f\|_1 = 0$, so folgt $\int \gamma_j \, d\mu \leq \int \|f\| \, d\mu = \|f\|_1 = 0$ aus 3°. Daher ist $\mu(\{\gamma_j > 0\}) = 0$ nach Definition des Integrals für nichtnegative Treppenfunktionen und weiterhin $\mu(\{h > 0\}) = \bigcup_j \mu(\{\gamma_j > 0\}) = 0$. Schließlich ist $\{\|f\| > 0\} \subset \{h > 0\} \cup Z$ und das bedeutet $\|f(x)\| = 0$ f.ü. und damit auch $f = 0$ f.ü., weil $\| \;\; \|$ eine Norm auf E ist.

8°. Diese Aussage ergibt sich direkt aus der Definition der Integrierbarkeit für eine Funktion f, die ja eine approximierende $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge von Treppenfunktionen verlangt, welche nur f.ü. gegen die Funktion f konvergieren muss.

Bemerkung: Im vorangehenden Beweis zu 7° hätte man also einfacher gleich beginnen können: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\|f\|$ messbar.

9°. Diese Regel zeigt man wieder unter direkten Rückgriff auf die approximierenden Treppenfunktionen.

10° wird in den Übungen behandelt, genauso wie das nachfolgende Beispiel. □

Für das Zählmaß ζ auf einer nichtleeren Menge X ist der Raum der integrierbaren Funktionen $f : X \to E$ in einen Banachraum E gerade der Raum aller absolutsummierbaren Familien $(v_x)_{x \in X}$ von Vektoren $v_x \in E$. Dabei heißt eine solche Familie genau dann *absolut summierbar*, wenn die endlichen Summen $\sum_{x \in Y} \|v_x\|$ eine obere Schranke haben. Für summierbare Familien (v_x) gilt:

1. Es ist $v_x = 0$ abgesehen von einer abzählbaren Teilmenge $Y \subset X$.
2. (v_x) hat als Summe einen Wert $s = \sum v_x$ in folgendem Sinne: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $Z \subset X$ so dass für alle weiteren endlichen Menge $H \subset X$, $Z \subset H$, die Ungleichung $\left\|s - \sum_{x \in H} v_x\right\| < \varepsilon$ zutrifft.

Diese Summe $s = \sum v_x$ ist völlig klar im Falle, dass Y endlich ist. Wenn Y abzählbar unendlich ist, kann man sich diese Summe auch vorstellen als den gemeinsamen Grenzwert $s = \sum_{n=0}^{\infty} v_{y(n)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} v_{y(n)}$ für die Bijektionen $y : \mathbb{N} \to Y$: Für jede Abzählung von Y hat die unendliche Reihe den gleichen Wert s.

Der Raum der bezüglich des Zählmaßes integrierbaren Funktionen ist ein normierter Raum, weil es zum Zählmaß keine nichtleeren Nullmengen gibt, und es kann gezeigt werden, dass dieser Raum, der mit $\ell_1(X, E)$ bezeichnet wird, vollständig ist (das folgt auch aus 46.14). Im Falle $X = \mathbb{N}$ und $E = \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nennt man $\ell_1 = \ell_1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ auch den Banachraum der absolut konvergenten Zahlenfolgen.

(46.11) Satz: *Integrierbare Funktionen sind fast überall messbar, das heißt, eine integrierbare Funktion wird nach einer gegebenenfalls nötigen Änderung auf einer Nullmenge eine messbare Funktion. Das bedeutet: Ist $f : X \to E$ integrierbar, so gibt es eine Nullmenge $N \subset X$, so dass $\chi_{X \setminus N} f$ messbar ist.*

Ist das Maß μ vollständig, so ist jede μ-integrierbare Funktion messbar.

Einen Beweis findet man z.B. in Amann-Escher.

Die für die Definition des Integrals entscheidende Aussage des Satzes 46.7 überträgt sich auf die integrierbaren Funktionen, wie das im folgenden Satz formuliert ist.

(46.12) Satz: (Normkonvergenzsatz) *Es sei (f_n) eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge von integrierbaren Funktionen $f_n \in \mathcal{L}_1(\mu, E)$ (d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert stets $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$). Dann gilt:*

1° *Es gibt eine Teilfolge von (f_n), die f.ü. gegen eine Funktion $f : X \to E$ konvergiert, und die zu jedem $\varepsilon > 0$ außerhalb einer Teilmenge $Z = Z(\varepsilon) \subset X$ vom Maß $\mu(Z) < \varepsilon$ gleichmäßig konvergiert.*

2° *Eine Grenzfunktion f nach 1° ist integrierbar und je zwei solche Grenzfunktionen sind f.ü. gleich.*

3° *Für jede Grenzfunktion f nach 1° gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ und daher auch*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu\,.$$

[18.12.2007]

Beweis:[4] 1°. Nach 46.11 kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass alle f_n messbar sind. Dann kann aber der Beweis zu 46.7 komplett übernommen werden, um 1° zu zeigen: Es werden lediglich die Treppenfunktion φ_j aus dem Beweis zu 46.7 durch die messbaren und integrierbaren Funktionen f_n ersetzt.
2° & 3°. Um zunächst zu zeigen, dass f integrierbar ist, gehen wir nach 1° von einer Teilfolge (f_{n_k}) aus, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit überall punktweise gegen f konvergiert (sonst kann man sie auf einer Menge vom Maß 0 abändern) und zu der es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $Z \subset X$ mit Maß $\mu(Z) < \varepsilon$ so gibt, dass gleichmäßige Konvergenz außerhalb von Z vorliegt. Da f_{n_k} für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ integrierbar ist, gibt es nach Definition der Integrierbarkeit von f_{n_k} eine Treppenfunktion τ_k und eine messbare Menge $Z_k \subset X$ mit $\mu(Z_k) < 2^{-k}$ und $\|\tau_k(x) - f_{n_k}(x)\| < 2^{-k}$ für alle $x \in X \setminus Z_k$. Die Treppenfunktion τ_k kann außerdem noch so gewählt werden, dass auch $\|\tau_k - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$ gilt, indem wir den nachfolgenden Hilfssatz 46.13 auf $g = f_{n_k}$ anwenden.

Die Folge (τ_k) ist eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge wegen

$$\|\tau_k - \tau_l\|_1 \leq \|\tau_k - f_{n_k}\|_1 + \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_1 + \|f_{n_l} - \tau_l\|_1 < 2^{-k} + 2^{-l} + \|f_{n_k} - f_{n_l}\|_1\,,$$

denn $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge. Für $x \in X \setminus Z$, wobei

$$Z := \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{m=k}^{\infty} Z_m \in \mathcal{A}\,,$$

gibt es $k \in \mathbb{N}$, so dass $x \notin Z_m$ für alle $m \geq k$, also ist $\|\tau_m(x) - f_{n_m}(x)\| < 2^{-m}$. Es folgt

$$\|\tau_m(x) - f(x)\| \leq \|\tau_m(x) - f_{n_m}(x)\| + \|f_{n_m}(x) - f(x)\| < 2^{-m} + \|f_{n_m}(x) - f(x)\|\,,$$

und daher $\tau_k(x) \longrightarrow f(x)$ ($\|f_{n_m}(x) - f(x)\| \longrightarrow 0$, denn die Folge (f_n) konvergiert ja punktweise gegen f). Ferner ist

$$\mu(Z) \leq \mu(\bigcup_{m=k}^{\infty} Z_m) \leq \sum_{m=k}^{\infty} 2^{-m} = 2^{-k+1}$$

[4] in Ergänzung zu der unvollständigen Darstellung in der Vorlesung

für alle $k \in \mathbb{N}$, also $\mu(Z) = 0$. Das bedeutet, dass $\tau_k(x)$ gegen $f(x)$ f.ü. konvergiert. Daher ist f integrierbar, und der erste Teil von 2° ist bewiesen.

Aus dem nachfolgenden Hilfsatz ergibt sich für $f = g$ sogar $\lim \|\tau_k - f\|_1 = 0$. Wegen $\lim \|\tau_k - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}$ folgt $\lim \|f_{n_k} - f\|_1 = 0$, und da nach Voraussetzung (f_n) eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge ist, folgt schließlich $\lim \|f_n - f\|_1 = 0$. Das ist die Aussage in 3°.

Es bleibt zu zeigen, dass die Grenzfunktion g einer weiteren Teilfolge von (f_n) mit den in 1° beschriebenen Eigenschaften fast überall mit f übereinstimmt. Dazu ist festzustellen, dass genauso wie zuvor gezeigt werden kann, dass $\lim \|f_n - g\|_1 = 0$ gilt. Es folgt $\|f - g\|_1 = 0$ und daher schließlich $f = g$ f.ü. nach 46.10.7°. □

(46.13) Hilfssatz: *Ist die integrierbare Funktion $g : X \to E$ f.ü. der Limes einer $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge (φ_n) von Treppenfunktionen, so gilt $\lim_n \|\varphi_n - g\|_1 = 0$.*

Bemerkung: Diese Aussage ist so selbstverständlich, dass sie fast schon verwirrend erscheint. Sie ist leicht zu zeigen (siehe unten), sie ist aber in der Tat nicht Bestandteil der Definition des Integrals und der Integrierbarkeit. Denn die Integrierbarkeit von g erfordert eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge von Treppenfunktionen φ_n, die f.ü. punktweise gegen g konvergiert, und es ist dann $\int g\, d\mu = \lim \int \varphi_n\, d\mu$. Damit ist viel über die punktweise Konvergenz von $(\varphi_n - g)$ gesagt und mittels Satz 46.7 auch über die gleichmäßige Konvergenz von $(\|\varphi_n - g\|)$ außerhalb von Mengen beliebig kleinen Maßes, aber noch nichts über die Konvergenz von $\|\varphi_n - g\|_1 = \int \|\varphi_n - g\|\, d\mu$.

Beweis von 46.13: Unter diesen Voraussetzungen ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(\|\varphi_n - \varphi_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolge von Treppenfunktionen, die f.ü. gegen $\|\varphi_n - g\|$ konvergiert. Also gilt für jedes feste $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\varphi_n - g\|_1 = \int \|\varphi_n - g\|\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int \|\varphi_n - \varphi_k\|\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1 .$$

Wegen der Cauchybedingung für (φ_n) ist aber

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_1 = 0 ,$$

und daher auch $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - g\|_1 = 0$. □

Sei $\mathcal{N}(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_1(\mu, E) : \|f\|_1 = 0\}$.

(46.14) Satz: *Der Quotientenraum $L_1(X, \mu, E) := \mathcal{L}_1(\mu, E)/\mathcal{N}(\mu)$ mit der durch die Seminorm $\|\ \|_1$ induzierten Norm $\|[f]\|_1 := \|f\|_1$, $f \in \mathcal{L}_1(\mu, E)$, ist ein Banachraum.*

Das ist im Wesentlichen die Aussage des Normkonvergenzssatzes 46.12.

§47 Konvergenzsätze

Die folgenden beiden Sätze sind das Kernstück der Integrationstheorie. Die ganze Mühe der allgemeinen Einführung der Integration in dem vorangehenden Paragrafen hat man sich gemacht, um diese beiden Sätze zu erzielen, die viele wichtige Anwendungen haben (z.B Parameterintegrale, wie sie noch in diesem Paragrafen behandelt werden).

Beweistechnisch basieren die beiden Sätze direkt auf den Normkonverganzsatz 46.12.

(47.1) Satz: (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von Levi) (f_n) *sei eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\sup\{\int f_n \, d\mu : n \in \mathbb{N}\} < \infty \,.$$

Dann konvergiert (f_n) *f.ü. gegen eine integrierbare Funktion* $f : X \to \mathbb{R}$ *und es gilt*

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu = \sup \int f_n \, d\mu \,.$$

(47.2) Satz: (Satz von der dominierten Konvergenz, Satz von Lebesgue) (f_n) *sei eine Folge integrierbarer Funktionen* $f_n : X \to E$*, die punktweise f.ü. gegen eine Funktion* $f : X \to E$ *konvergiere, und zu der es eine integrierbare skalare Funktion* $g : X \to \mathbb{R}$ *gebe mit*

$$\|f_n(x)\| \leq g(x)$$

für alle $x \in X$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$*. Dann ist* f *integrierbar und es gilt*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu \,.$$

In den Beweisen zu beiden Sätzen muss lediglich gezeigt werden, dass die Folgen (f_n) unter den gegebenen Voraussetzungen $\mathcal{L}_1$-Cauchyfolgen sind, um dann unmittelbar den Normkonvergenzsatz 46.12 anzuwenden. [21.12.2007]

Der fundamentale Satz von Lebesgue 47.2 heißt auch der Satz von der *majorisierten Konvergenz*.

Der Vergleich mit der Integrierbarkeit nach MIA / MIIA:

(47.3) Satz: *Es sei* $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *und* $f : X \to E$*.*

1° *Ist* f *stetig, so ist* f *lebesgueintegrierbar.*

2° *Ist* f *sprungstetig, so ist* f *ebenfalls lebesgueintegrierbar.*

Dabei ist das Lebesgueintegral auf $X \subset \mathbb{R}$ wie zuvor durch Restriktion von $\mathbb{R}$ auf X definiert: f ist definitionsgemäß genau dann lebesgueintegrierbar, wenn die durch 0 fortgesetzte Funktion auf $\mathbb{R}$ lebesgueintegrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Analog für beliebige (messbare) Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: 1°. Natürlich folgt 1° sofort unmittelber 2°. Wir wollen aber 1° direkt beweisen unter Ausnutzung der Stetigkeit und mit Verwendung von Satz 47.2, dessen Wirkung in den Anwendungen auf diese Weise gezeigt werden soll.

Wir betrachten die Zerlegungsfolge $Z_k := \{a + j2^{-k}(b-a) : 0 \leq j \leq 2^{-k}\}$ des Intervalls X und setzen

$$f_k(t) := f\left(a + j2^{-k}(b-a)\right) \,, \ \text{ wenn } \ t \in \left[(j-1)2^{-k}(b-a), j2^{-k}(b-a)\right] \,.$$

Offensichtlich ist f_k eine Treppenfunktion , also insbesondere integrierbar, und es gilt $\|f_k(x)\| \leq \|f\|$ mit $\|f\| = \sup\{\|f(t)\| : t \in X\} =: M < \infty$ wegen der Stetigkeit von f. Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der stetigen Funktion f konvergieren die f_k gleichmäßig gegen f, insbesondere auch punktweise. Schließlich ist die konstante Funktion $g(t) = M$, $t \in X$, lebesgueintegrierbar mit Integral $\int_X g \, d\lambda = M(b-a)$, und wir haben $\|f_n(x)\| \leq g(x)$. Nach Satz

47.2 ist daher f als Grenzfunktion der f_k lebesgueintegrierbar (mit $\int_X f\,d\lambda = \lim \int f_k\,d\lambda = \lim_{k\to\infty} 2^-k(b-a)\sum_{j=1}^{k} f(a+j2^{-k}(b-a))$).
Der Beweis von 2° geht analog oder noch direkter, denn die sprungstetigen Funktionen sind ja gerade die gleichmäßigen Limites von Treppenfunktionen,vgl. 27.15. □

Der Vergleich mit den integrierbaren Funktionen nach Riemann:

(47.4) Satz: *Jede beschränkte, riemannintegrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch lebesgueintegrierbar.*

Dazu muss nur an den Satz 28.10 appelliert werden, der besagt, dass f außerhalb einer Nullmenge stetig ist.

(47.5) Satz: (Parameterintegral) *Sei*

$$f : X \times \Omega \to E$$

eine Abbildung mit Werten in einem Banachraum E, wobei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und Ω ein metrischer Raum ist, und es sei für alle Parameterwerte $t \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar. Setze

$$g(t) := \int f(x,t)\,d\mu\,,\ t \in \Omega\,.$$

Ist dann für alle $x \in X$ die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ stetig, und gibt es eine integrierbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f(x,t)\| \le h(x)\,,\ \forall\,(x,t) \in X \times \Omega\,,$$

so ist $g : \Omega \to E$ stetig.

Beweis: Für eine konvergente Folge (t_n) mit $t_n \to t_0$ in Ω ist $f_n(x) := f(x,t_n)$ integrierbar und konvergiert punktweise gegen $f(x,t_0)$. Ferner ist $\|f_n(x)\| \le h(x)$. Also gilt $\int f(x,t_0)\,d\mu = \lim \int f_n\,d\mu$ und das ist gerade $g(t_0) = \lim g(t_n)$. □

(47.6) Satz: (Parameterintegral) *Sei*

$$f : X \times \Omega \to E$$

eine Abbildung mit Werten in einem Banachraum E, wobei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, und es sei für alle Parameterwerte $t \in \Omega$ die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar. Setze

$$g(t) := \int f(x,t)\,d\mu\,,\ t \in \Omega\,.$$

Ist dann für alle $x \in X$ die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ stetig differenzierbar mit Ableitung $f'(x,t)$, und gibt es eine integrierbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\left\|f'(x,t)\right\| \le h(x)\,,\ \forall\,(x,t) \in X \times \Omega\,,$$

so ist $g : \Omega \to E$ stetig differenzierbar mit

$$g'(t) = \int f'(x,t)\,d\mu(x)\,.$$

(47.7) Satz: (Parameterintegral) *Sei*

$$f : X \times \Omega \to E$$

eine Abbildung mit Werten in einem Banachraum E, wobei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist, und es sei für alle Parameterwerte $x \in X$ die Funktion $q \mapsto f(x,q)$, $q \in \Omega$ stetig partiell differenzierbar mit Ableitungen $\partial_j f(x,q)$, $1 \leq j \leq n$. Ferner sei $h \in \mathcal{L}_1$, $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Abschätzung

$$\forall\,(x,q) \in X \times \Omega \,:\, \|\partial_j f(x,q)\| \leq h(q)\,.$$

Dann ist g stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_j g(q) = \int \partial_j f(x,q)\, d\mu(x)\,.$$

Bemerkung: Diverse Varianten mit „f-ü.“.

(47.8) Satz: Es sei $X = \bigcup U_n$ mit $U_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt für $f : X \to E$:

$$f \in \mathcal{L}_1 \iff \forall\, n \in \mathbb{N} : f|_{U_n} = \chi_{U_n} f \;\text{ integrierbar und }\; \left(\int_{U_n} \|f\|\, d\mu\right) \;\text{ konvergiert.}$$

(47.9) Folgerung: $f \,:\,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ *sei lebesgueintegrierbar auf jedem kompakten Teilintervall $I \subset \,]a,b[$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° f *integrierbar.*

2° $|f|$ *integrierbar.*

3° $\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} |f|\, d\lambda$ *existiert für Folgen* $a_n \searrow a$, $b_n \nearrow b$.

§48 Produktmaß

Wir kennen das Produkt von Messräumen $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$:

Die unterliegende Menge ist das kartesische Produkt $X \times Y$:

Die Produktalgebra ist die „Tensoralgebra“ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, das ist die von den Produkten $A \times B$ („Rechtecken“) erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}\,,\, B \in \mathcal{B}\})$.

Seien jetzt μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und ν ein Maß auf $(Y, \mathcal{B})$ vorgegeben. Gesucht ist ein kanonisch gegebenes Maß $\mu \otimes \nu$ auf dem Produkt $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, welches in gewisser Weise iterativ gegeben ist. Ein solches Maß existiert eindeutig im Falle, dass man von σ-endlichen Maßen ausgeht (vgl. 48.9).

Wichtigste Anwendung im Rahmen der Vorlesung: Das Lebesguemaß λ_2 auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist als Produktmaß $\lambda_1 \otimes \lambda_1$ darstellbar, und allgemeiner $\lambda_{m+n} = \lambda_m \otimes \lambda_n$ sowie $\lambda_n = \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_1$.

(48.1) Satz von Fubini: *Zu zwei σ-endlichen Maßräumen gilt für das Produktmaß $\mu \otimes \nu$: Für $f \in \mathcal{L}_1(X \times Y, \mu \otimes \nu, E)$ ist*

$$\int_{X\times Y} f\, d\mu \otimes d\nu = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right)\, d\nu(y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right)\, d\mu(x)\,.$$

Dazu benötigt man die Eigenschaften

– $X \to E\,,\; x \mapsto f(x,y)$ ist *μ-integrierbar f.ü. in Y*

– $Y \to E\,,\ y \mapsto \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$, *ist ν-integrierbar,*
und dasselbe mit den Rollen von X und Y vertauscht.

(48.2) Beobachtung: Das System $\mathcal{R}$ der endlichen Vereinigungen von „Rechtecken“ $A \times B$, $a \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, ist eine Mengenalgebra, das edeutet endliche Vereinigungen und Komplementbildungen führen nicht aus dem System $\mathcal{R}$ heraus.

(48.3) Definition: (monotone Klasse) Ein System $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(Z)$ von Teilmengen einer Menge Z heißt *monoton*, oder *monotone Klasse*, wenn die folgenden zwei Permanenzeigenschaften erfüllt sind:

$$\begin{aligned} Y_n \in \mathcal{M}\,,\, Y_n \subset Y_{n+1} \quad &\Longrightarrow \quad \bigcup Y_n \in \mathcal{M}\,, \\ X_n \in \mathcal{M}\,,\, X_n \supset X_{n+1} \quad &\Longrightarrow \quad \bigcap X_n \in \mathcal{M}\,. \end{aligned}$$

Bemerkungen: 1. Eine monotone Mengenalgebra ist stets eine σ-Algebra. 2. Jede σ-Algebra ist eine monotone Klasse und natürlich auch eine Mengenalgebra.

(48.4) Lemma: *Es sei $\mathcal{R}$ eine Mengenalgebra und $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{R})$ die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{R}$ enthält. Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und es gilt $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{R})$: $\mathcal{M}$ ist die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra.*

Folgerung: Für unsere Situation der Produktstruktur ist $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ als die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra zugleich die von $\mathcal{R}$ erzeugte monotone Klasse $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Wir verwenden im Folgenden den Integralbegriff ein wenig allgemeiner, als bisher dargestellt. Dabei geht es nur um numerische Funktionen $h : X \to [0,\infty]$, die f.ü. messbar sind.

(48.5) Definition: (Numerische Integrale, Ausdehnung des Integralbegriffs) Für f.ü. messbare $h : X \to [0,\infty]$ setze

$$\overline{\int} h\,d\mu := \sup\{\int \varphi\,d\mu :\ h \in \mathcal{T}(\mu)\,,\, \varphi \leq h\}\,.$$

Es gilt $\overline{\int} h\,d\mu = \sup\{\int \varphi\,d\mu :\ \varphi\ \text{integrierbar}\ ,\, \varphi \leq h\}$.

(48.6) Lemma: *Es sei $h : X \to [0,\infty]$ integrierbar. Dann ist $\overline{\int} h\,d\mu < \infty$ und es gilt $\overline{\int} h\,d\mu = \int h\,d\mu$.*

(48.7) Konvention: Wir schreiben $\int h\,d\mu$ anstelle von $\overline{\int} h\,d\mu$ auch für f.ü. messbare, aber nicht notwendig integrierbare Funktionen $h : X \to [0,\infty]$.

Auch wenn auf diese Weise einer nicht integrierbaren, messbaren Funktion h ein Integral $\int h\,d\mu = \infty$ zugeordnet wird, wird h nicht etwa „integrierbar“ genannt.

(48.8) Satz: $f : X \times Y \to [0,\infty]$ sei messbar bezüglich der Produktstruktur auf $X \times Y$. Dann:

1° Für jedes $x \in X$ ist die partielle Funktion $f_x : Y \to [0,\infty]$, $y \mapsto f(x,y)$ messbar,

2° $x \mapsto g(x) := \int_Y f_x\,d\nu = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$, ist messbar.

(48.9) Cavalieriprinzip: Auf $X \times Y$ gibt es genau ein Produktmaß $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ mit

1° $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)\,,\ A \in \mathcal{A}\,,\ B\mathcal{B}\,,$

2 $forall\, M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$:

$$\mu \otimes \nu(M) = \int_X \left(\int_Y \chi_M(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_x \chi_M(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)\,.$$

(48.10) Folgerung: *Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann ist die Menge $M^f := \{(x,t) \in X \times [0, \infty[\, : t < f(x)\}$ messbar in $X \times [0, \infty[$ mit*

$$\mu \otimes \lambda(M^f) = \int_X f\, d\mu\,.$$

§49 Transformationssatz – Das euklidische Lebesgueintegral

Wir haben jetzt alle abstrakten Resultate der Maß- und Integrationstheorie beisammen, um die euklidische Integrationstheorie zu formulieren und anzuwenden: $\lambda = \lambda_n$ sei wie zuvor das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

(49.1) Zusammenfassung: Drei Wege zum euklidischen Lebesgueintegral.

(49.2) Satz: (Invarianz) *Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesguemessbar und $f \in \mathcal{L}_1(\lambda, E)$. Dann gilt:*

1° Für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda(A) = \lambda(A + v) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\,.$$

„Das Lebesguemaß / die Lebesgueintegration ist translationsinvariant.“ *(Hier und im Folgenden: $\lambda = \lambda_n$ und $d\lambda_n = d\lambda = dx$.)*

2° *Für $T \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ gilt:*

$$\lambda(A) = \lambda(TA) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\,.$$

„Das Lebesguemaß / die Lebesgueintegration ist rotationsinvariant, insgesamt also invariant gegenüber euklidischen Bewegungen.“

3° *Für alle $r \in \mathbb{R}\,,\ r > 0$ gilt:*

$$\lambda(rA) = r^n \lambda(A) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(rx)\, dx = r^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\,.$$

„Das Lebesguemaß / die Lebesgueintegration ist n-homogen.“

(49.3) Beispiel: Volumen der euklidischen Einheitskugel.

(49.4) Transformationsformel: *Es seien $\Omega, \Sigma \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und es sei $\Phi : \Omega \to \Sigma$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Dann gilt für $f : \Sigma \to E$:*

$$f \text{ ist integrierbar} \iff f \circ \Phi\, |\det D\Phi| \text{ ist integrierbar}$$

jeweils bezüglich λ_n, und es gilt

$$\int_\Sigma f(x)\,d\lambda(x) = \int_\Omega f\circ\Phi(y)\,|\det D\Phi(y)|\ d\lambda(y)\,.$$

Bemerkung: Rezept ähnlich wie im Falle $n = 1$, aber ohne Orientierung. $\int_a^b f(x)\,dx$ transformiert sich nach der Maßgabe $x = \varphi(y)$ vermöge $dx = \varphi'(y)\,dy$ zu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy\,,$$

wenn nur $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar und ist und die Intervallenden aufeinander abbildet.

(49.5) Folgerung: (Maßtransformation) Für messbare $A \subset \Omega$ gilt $\varphi(A) \subset \Sigma$ ist ebenfalls messbar und es ist

$$\lambda(\varphi(A)) = \int_A |D\varphi(y)|\ dy\,.$$

(49.6) Fouriertransformation: